数学的アイデアの創発的思考の分析

内　田　靖　子

群馬大学教育実践研究　別刷
第31号　11～20頁　2014

群馬大学教育学部　附属学校教育臨床総合センター

群馬大学教育実践研究　第31号　11～20頁　2014

数学的アイデアの創発的思考の分析

内　田　靖　子

群馬大学大学院教育学研究科

An Analysis of Emergent Thinking of Mathematical Ideas

Yasuko UCHIDA

Graduate School of Education, Gunma University

キーワード：創発的思考，反省的思考と反照的思考，選択的知覚
Keywords: Emergent Thinking, Reflective Thinking, Selective Perception

（2013年10月31日受理）

１．はじめに

学校教育における学びとは，生徒が学んだことの意味や価値を理解できるよう生成していく過程である。数学授業では，コミュニケーションを通して多面的な見方や本質を追求していく方法を学ぶ。

授業においてともに学ぶことにより，いずれの生徒にも今までにもち得なかった新しい考えが生み出されることがある。それは，推論をしながら新しいものを創り出していく創発的思考である。「創発とは，構成要素以上のものをもたらし，かつ，もとの要素に還元できないものを生み出すことである（江森，2010，p. 71）」という定義に基づいて考察する。創発的思考を分析することにより，数学理解を深める過程を考察することができると考える。

その分析には，“Reflective Thinking” を反省的思考と反照的思考の２つの層に分けて捉える必要がある。反省的思考は，思考を表したものを内省し試行錯誤を経て，個人でより良い表現にかきかえる段階である。一方，反照的思考は，反省的思考によりかきかえられた表現を観照し，他者とのコミュニケーションなどから刺激を受けることで創発される段階である。創発的思考は，反省的思考と反照的思考の一連の思考と考える。反照的思考の結果として，新たな解釈としての選択的知覚が与えられる。選択的知覚とは，ある１つの解釈により，対象を何らかの固まりや構造物とみる見方である。それは，その後の認知過程によって再解釈され，別の構造として認識され，新たな思考を生み出すことへとつながる（cf. 江森，2010，pp.71-72）。

これらのことから，いかに反省的思考から反照的思考へと進み，結果として選択的知覚により新しい構造が得られるのかを分析する。そのために，他者の刺激を受けて知識が構造化されるよう内省的な心的活動の場を設けることが必要であると考える。いかに他者とかかわり，その相互作用からアイデアを創発することができるかを考察する。したがって，本稿の目的は，数学的アイデアの創発的思考過程を明らかにすることにある。

そこで，創発的思考過程を考察するために，問いに向き合う筆者の思考が，他者からのメッセージを契機にいかに創発され発展していくのかを分析する。「問い→思考実験１→他者からの刺激→思考実験２」へといかにして変容し，数学的アイデアの創発的思考が生み出されていくのかを考察する。同時に，本質的な意味を追究し思考していくには，ともに学ぶ他者がいかなる役割をもち，個人が深めていくことができるのかを検討する必要がある。

2．思考実験１

推論をしながら新たに目覚めさせることができる創発的思考の事例について具体的に考える。

推論とは，ある推測に対する考察と検証の過程であり，蓋然的推論は特殊から一般へ，論証的推論は一般から特殊へと対象を扱うことにより進めていく思考の仕方である。このような具体から抽象への活動と抽象から具体への活動は，対で捉えることが必要である。

また，類似性に注目する活動は，観察することができないため，心的に２つの対象を関連づけ，関係を創り上げることが求められる。関係とは，外的な物の中に備わるものではなく，対象間に関係を創り上げる個人の心の中に存在する。

Brunerによれば，ある分野で基本的諸観念を習得するということは，ただ一般的原理を把握するというだけではなく，学習と研究のための態度，推量と予測を育ててゆく態度，自分自身で問題を解決する可能性に向かう態度などを発達させることと関係があるという。「重要な要素は，発見をうながす興奮の感覚であるように思われる。ここで発見というのは，以前には気づかれなかった諸関係のもつ規則正しさと，諸観念の間の類似性を発見するということであり，その結果，自分の能力に自信をもつにいたるのである（Bruner, 1960/1963, p.25）」。推論において，生徒は対象を深く理解して学習し，さらにその上に新たに必要なものを創造し表現することができる。その中に，発見の喜びや次への意欲につながるものがあると考える。

問題「2^{2004}を１，２，３，…，2^{2004}で割った商として現れる整数は何種類あるか（JJMO, 2004）」を事例として，理解の深化過程を分析する。まずは，思考実験として考えていく。考え始めるとすぐに，2^{2004}という大きな数は想像できないため，それを思考の対象とすることは難しいことがわかる。そのようなときは，考えられるものについてまず表してみることから始める。問題解決における数学的な考え方として，その問いを簡単な類比の問題に変え次元を下げ，対象を観察し試すことがあげられる。何もかき出さなければ始まらないが，思考したものを外化することにより，それを反省的思考の対象として認識することが可能となる。2^{2004}を２のべき乗とみれば2^4，３の倍数乗とみれば2^3を調べることから始まる。2^4という2^{2004}の類比の場合

表１：2^4の表記

	商
$2^4 = 16 \div 1$	$= 16$
2	8
3	5
4	4
5	3
6	2
7	2
8	2
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1

表２：2^5の表記

	商		商
$2^5 = 32 \div 1$	$= 32$	$64 \div 17$	$= 1$
2	16	18	1
3	10	19	1
4	8	20	1
5	6	21	1
6	5	22	1
7	4	23	1
8	4	24	1
9	3	25	1
10	3	26	1
11	2	27	1
12	2	28	1
13	2	29	1
14	2	30	1
15	2	31	1
16	2	32	1

を表してみると，2^4を1，2，3，…，2^4で割った商として現れる整数は，1，2，3，4，5，8，16の7種類あることがわかる(表1)。2のべき乗とみると，次に2^5を考え，1，2，3，…，2^5で割った商として現れる整数は，1，2，3，4，5，6，8，10，16，32の10種類あることがわかる(表2)。一方，2^{2004}を特に2の偶数のべき乗と捉える場合，2^4の後は2^6を考察することになり，1，2，3，…，2^6で割った商として現れる整数は，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，12，16，21，32，64の15種類あることがわかる(表3)。ここで，2のべき乗として2^2から表し始めなかったのは，2^2では数が少なく規則性を探すのに読みとりづらいと考えるからである(表4)。

このように，2^{2004}からより簡単な類比の場合を調べることにより，この問いにあたる準備をすることができたといえる。具体的にかき出すことで，これから探そうとする何らかの規則性や構造を読みとっていくための表現を作ることができた。

表3：2^6の表記

	商		商		商
$2^6=64\div1$	$=64$	$64\div28$	$=2$	$64\div55$	$=1$
2	32	29	2	56	1
3	21	30	2	57	1
4	16	31	2	58	1
5	12	32	2	59	1
6	10	33	1	60	1
7	9	34	1	61	1
8	8	35	1	62	1
9	7	36	1	63	1
10	6	37	1	64	1
11	5	38	1		
12	5	39	1		
13	4	40	1		
14	4	41	1		
15	4	42	1		
16	4	43	1		
17	3	44	1		
18	3	45	1		
19	3	46	1		
20	3	47	1		
21	3	48	1		
22	3	49	1		
23	3	50	1		
24	3	51	1		
25	3	52	1		
26	3	53	1		
27	3	54	1		

表4：2^2の表記

$2^2=4\div1$	$=4$
2	2
3	1
4	1

表5：2^6の反省的思考

	商		商
$2^6=64\div1$	$=64$	$64\div22$	$=2$
2	32	23	2
3	21	24	2
4	16	25	2
5	12	26	2
6	10	27	2
7	9	28	2
$8=2^3$	$8=2^3$	29	2
9	7	30	2
10	6	31	2
11	5	$32=2^5$	2
12	5	33	1
13	4	34	1
14	4	35	1
15	4	36	1
$16=2^4$	4	37	1
17	3	⋮	⋮
18	3	$64=2^6$	1
19	3		
20	3		
21	3		

かき表した3つの表から次の思考を始めようとするが，表記をつくって思考は止まってしまう。そこで，2^{2004}を偶数乗と捉える考えを採用し，2^4と2^6を再度見直し新たな表現を探していく。表現されたものを反省的思考の対象として思考を深め，表し直してみる。例えば，表3の$2^6=64$を32で割ったときに$32=2^5$に気がつけば，2のべき乗で割った後が商に変化があるタイミングだとわかる。商が次の数に変わるタイミングは割り切れた後，つまり，2のべき乗のときであるから，割る数を2のべき乗の形にかき直してみる(表5)。

この発見が，考察の対象を数学的に構造化することにつながる。そして，表５を用いて，商の種類の個数を具体的にみていくことができる。

下から商をみていくと，１，２，３，…と順になっていて途中までは個数を数えられるが，それ以上は進まない。それに対し上からみていけば，割る数が１，２，３，…と順になっている。この段階ではこの２つの考えにはつながりがもてず，思考は止まってしまう。そこで，商に同じ数が出てこなくなるのはどのようなときかを考え始める。表５の下から商を数えていくと10までは連続していることがわかり，２のべき乗のタイミングと合わせて考えてみる。人はある問題を考えるとき，漠然としながらも，こうやったらよいのではないかという見通しをもって試し始める。そこでこの２つの考えをつなぐ境目は2^3と仮定し線を引き，まずはこの仮説から出発する。2^3を区切りとして下から商の種類を数えていけば１，２，…，８までとなり，上から割る数の数字をみると１，２，…，８となる(表６)。８のところで２回数えているので，１回分ひくことで，８＋８－１＝15と商の個数を結論づけることができる。よって，2^3を境目とした考えを確かめ，検証することができた。最初は難しいと思われたこの問題も，このような仮説と検証により解決へと進む。初めは境界線をかこうという認識はなく，線が入ることすら考えていなかったが，１つの推測から線を引くという考えを生み出すことができた。この構造を読みとるためにもこれらの表現は役に立ち，思考の道具となっている。

表６：2^6の観照的思考

	商
$2^6 = 64 \div 1$ =	64
2	32
3	21
4	16
5	12
6	10
7	9
$8 = 2^3$	$8 = 2^3$
9	7
10	6
11	5
12	5
13	4
14	4
15	4
$16 = 2^4$	4
17	3
18	3
19	3
20	3
21	3

	商
$64 \div 22$ =	2
23	2
24	2
25	2
26	2
27	2
28	2
29	2
30	2
31	2
$32 = 2^5$	2
33	1
34	1
35	1
36	1
37	1
⋮	⋮
$64 = 2^6$	1

商に出てくる数字を下からみていくと，途中から不規則になるため，そのままでは数えられない。そこで，2^3の境目で見方を変え，割る数の数字を数えることでもとの数値を置き換え，１ずつの足し算で規則的に増える現象に替えてみせている(表６)。この関係をもたらした観照は，新たな構造を見い出そうとした努力により発見された。２のべき乗という視点が，新しい解釈を生み出すことになったといえる。一面的であった自分の見方を，もう一度みつめ直すことによって行われる知覚の更新である。

以上のことから，2^6を１，２，３，…，2^6で割った商として現れる整数は，$2^3+2^3-1=15$となる。同様に，2^4においても，2^2(表７の傍線部)を境目にして数

表７：2^4の観照的思考

	商
$2^4 = 16 \div 1$ =	16
2	8
3	5
$4 = 2^2$	$4 = 2^2$
5	3
6	2
7	2
$8 = 2^3$	2
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
$16 = 2^4$	1

えると，$2^2+2^2-1=7$となる。帰納的に確かめることで，与えられた問題についても同様に適用することができる。したがって，2^{2004}の場合は，$2^{1002}+2^{1002}-1=2\cdot 2^{1002}-1=2^{1003}-1$と考える。

思考の理解深化の段階を振り返ってみる。最初は，とりあえず考えを外化し，表をかくことから始めた。規則性を探そうという意識で表をかくため，この表記は割る数と商のセットで縦に並べられている。かいてみたものを振り返ることで意識化され，発見へとつながる。とりあえずかいてみたこれらの表は，規則を読みとるために有用であると気づき，思考の道具となり考えることができる。この表現の良さに気がつくことで自信になり，この後もこの表現をもとにして思考していく。対象の表現のある部分に線をひき，注視された全体を個々の構成部分にばらして吟味する。しかし，この分割的な吟味が行われるからといって，全体を認識する思考が終わったわけではない。さらに，すでに観察してきたものに再度たちかえり，今示されている状況を全体的な視野のもとで見直す。このようにして，さまざまな要素が関係し合う１つの構造体として，捉えることができるようになるのである。そして，選択的な知覚が始まり，新たな解釈の段階が生まれ，内容を分析し表現することが可能となる。

３．協同での思考

問題「2^{2004}を１，２，３，…，2^{2004}で割った商として現れる整数は何種類あるか（JJMO，2004）」を他者とともに考えることで，思考がさらに深まっていく過程を考察する。

３．１　思考実験１から思考実験２への変容の概要

思考実験１では2^{2004}を２のべき乗，３の倍数乗，偶数のべき乗として捉えることから始めた。そして，２の偶数のべき乗としての類比な問題に変え，2^4や2^6の表現から構造を読みとり答えを導いた。つまり，この問いを２の偶数のべき乗としてみる方法だけで完結したのである。

その後，大学４年生にこの問題をどのように解くのか聞いてみることにした。2^{2004}の数字自体がイメージできないという声があがり，「とりあえず１，２，３，…と順に考えてみる」という学生Ａからの刺激を受けることになる。２の偶数のべき乗としかみていなかった筆者の思考に新たな解釈が生まれる。ここから，2^{2004}を大きな数とみる見方が創発され，一般的な数で試すことになる。

そこで，13の場合の表現から商の個数を考えてみるが，一般的な仕組みはわからず思考は止まってしまう。思考実験１では，２のべき乗の視点が構造化の把握のポイントであり，この場合はその考えは使えないからである。

そのとき，学生Ｂが，「かけ算って，$a\times b$はどっちが商でも同じだから，同じのが出てくる」とつぶやく。そこから割る数と商の大小関係が入れ替わるタイミングで線をひいてみることになる。境界線の上と下で商の個数が同じであることに気がつき，仕組みを捉えることができる。

さらに，13の次には，$16=4^2$を調べてみようと試みることになる。境界線をひいたときに，割る数と商が（４，４）のような同じ数になる場合はどうするのか疑問に思ったからである。16の表現を確認すると，13との違いは４での重なりの分の１をひくことだとわかる。

このように，協同で思考することにより思考実験１での１人の考えからは離れ，2^{2004}を大きな数と捉えたmからm^2を考えた。さらに，その特殊化されたものとして$2^{2004}=(2^{1002})^2$を新たに捉えることができるのである。数学は，一般化することで拡がっていくことが可能となる。

３．２　思考実験２

大学４年生にどのような過程で考えるかを聞くと，「こんな数字わからない」と2^{2004}の数字自体がイメージできないという声があがる。そして，学生Ａは，「とりあえず１，２，３，…と順に考えてみる」と表８のように表すことから始めた。この考えは，2^{2004}ではイメージができないため，まずは１，２，３，…と順に試している初歩的な段階である。しかし，このメッセージを聞くことにより，２のべき乗と捉えていた筆者の思考に影響を与えることになる。誰かが何かをいうことで，思考実験での完結した考えで終わらず，一般的な数で再度考えてみようという意欲につながる。最初の段階では意識していない他者からのメッセージによって，意識作用と意識対象の相関関係が生じるのである。そこから，超越的な新しい考えを創り出すことへつながっていく。開かれた可能性への積極的な姿勢

表８：学生Ａの考え

		商
$1 = 1 \div 1 = $		1
		商
$2 = 2 \div 1 = $		2
	2	1
		商
$3 = 3 \div 1 = $		3
	2	1
	3	1

が思考の継続につながり，新しい解釈や発見を生むことができる。学生Ａは，筆者に教えようとしたわけではなく，外化されたメッセージが互いに意識しなかった効果を生み出しているのである。１つのタイプの考え方から他への変換は容易ではなく，そこには多大なエネルギーを要する。ここに，創造的な相互作用が求められ，協同で学ぶ可能性はあると考える。

与えられた刺激による創発とは，2^{2004}を大きな数とみる見方である。ナンバーセンスが働いてしまい，思考実験では2^{2004}を２のべき乗としか捉えていなかったが，このアイデアからいろいろな数で試すことになっていく。江森(2012)は，「アイデアの創発には，自分の思考の限界に気づくという反省的思考が必要であり，例示された表現を観照する反照的思考により自分自身の思考の枠組みを超越する必要がある(p.154)」と述べている。このように，個人が考え抜いた後での刺激だからこそ気がつくことができる。ここから送り手も受け手ももち得なかったアイデアが創発され，見方を変える選択的知覚を与えることになる。

まずは，大きな数としての簡単な類比として，13から始める。13を例に，商の個数を考えようとするが，思考は止まってしまう。ともに考えていたときに，生徒Ｂが，「かけ算って，$a \times b$はどっちが商でも同じだから，同じのが出てくる」とつぶやく。そこから，割る数よりも商が小さくなり(割る数＞商)，大小関係が入れ替わるタイミングで線をひいてみる(表９)。そこで線の上をみてみると，割る数と商のペアとして，(１，13)，(２，６)，(３，４)があり，そのペアが線の下でも出てくることに気がつく。ただし，割る数と商は逆転して，意味は変わっている。この数を逆にみる発想は，かけ算九九表で学習した考え方であるが，学んでいてもこの考えをあまり使っていないために難しさがある。他者の考えを聞くことで，この見方に気がつき，境目の線をひくことができる。線の上では商が３つあり，線の下でも同じペアが出てくるので結局３つある。よって，商の個数は２×３＝６だということがわかる。

次に，16について同様に考える。その考えは，表９で(３，４)の線をひいたときの発見からくるものである。かけ算は右と左を逆にしてもよいということを理解していれば，(４，４)のような同じ数字はどうするのだろうかと考えるためである。そのときはいくつかと思い，13の後に14や15をせずに16を考えたくなる。例えば，13，14，15と考えた場合，パターンは１通りしか出てこない。連続的な数で思考しなければならない場合もあるが，この場合は別のパターンになる数はないかと調べ，一般化へと導きたい。つまり，適当に数字を考えるのではなく，例としてどういうものを選ばなければならないのかを考える必要がある。具体を選ぶ能力には違いがあり，そこにはナンバーセンスが働くことになる。

表９：13の表現

		商
$13 = 13 \div 1 = $		13
	2	6
	3	4
	4	3
	5	2
	6	2
	7	1
	8	1
	9	1
	10	1
	11	1
	12	1
	13	1

表10：16の表現

	商
16＝16÷1	＝16
2	8
3	5
4	4
5	3
6	2
7	2
8	2
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1

表11：2^5の表現

	商		商
2^5＝32÷1	＝32	64÷17	＝1
2	16	18	1
3	10	19	1
4	8	20	1
5	6	21	1
6	5	22	1
7	4	23	1
8	4	24	1
9	3	25	1
10	3	26	1
11	2	27	1
12	2	28	1
13	2	29	1
14	2	30	1
15	2	31	1
16	2	32	1

16のときも同様にして考え，割る数よりも商が小さくなり(割る数＞商)，大小関係が入れ替わるタイミングで線をひく(表10)。そこで，線の上をみてみると，割る数と商のペアとして，(1，16)，(2，8)，(3，5)，(4，4)があり，そのペアが線の下でも意味が逆転して出てくる。線の上では商が4つあり，線の下でも同じペアが出てくる。4は2回出てくるので，1回分ひくことにより，商の個数は2×4－1＝7といえる。

思考実験1のとき最初に表した2^5は，2^{2004}を2の偶数のべき乗と考えたためにその後考えることはなかったが，大きな数と捉えたときに再度考えてみようと思い直す。2^5においても割る数と商の大小関係が逆転するところで線をひくと，線の上には(1，32)，(2，16)，(3，10)，(4，8)，(5，6)があり，線の下でも同じペアが出てくることがわかる(表11)。このことからも，2^5の商の個数は2×5＝10と考えることができる。この考え方は，13のときと同じであり，13と16と2^5を調べることで，考えられるパターンとして一般化すると，mとm^2の2つの場合があることがわかる。

思考実験のときに捉えた2^{2004}を2のべき乗としてみる見方ではなく，2^{2004}を大きな数と捉えmからm^2を考えた。その特殊化されたものとして2^{2004}を新たに捉えることができる。

これまでみてきたように，問いから新しいものを生み出していく過程において，問いのもっている意味がだんだんとまとまっていく。あまり意識せずに受け取った刺激が，時間が経つにつれ相互に作用し合って徐々に意味をもってくる。このように，協同での学びから内化していく作用が重要な役割をもっていると考える。

与えられた問いの$2^{2004}=(2^{1002})^2$を考える代わりに，まず類比であるm^2を考えていく。m^2から，具体的に$16=4^2$を調べることにより，与えられた問題の方法について帰納的に推測する。表10より，$16=4^2$の商の個数は，2×4－1と考えたことから，一般にm^2の商の個数は$2m-1$と考えることができる。したがって，2^{2004}の場合は，$2\cdot 2^{1002}-1=2^{1003}-1$となる。

では次に，帰納的に考えてきたことを検証する。この問いを解くことができたので，一般化しようと考えることになる。「m^2を1，2，3，…，m^2で割った商

として現れる整数の個数は$2m-1$である」を証明する。m^2での表現について具体的に表してみる(表12)。その証明には，２つのことを示す必要がある。第１に，表12のmのところで区切ると，境界線の上では割る数に対して，異なる商が出てくる必要があるということである。第２に，境界線の下での商は１，２，…，$m-1$，つまり，線の上で割る数として出てきたものと同じものだということである。

$1\leq k\leq m^2$とする。そのとき，$m^2=k\cdot q_k+r_k$，$0\leq r_k<k$となるq_k，r_kは一意に存在する。つまり，m^2をkで割ったときの商はq_k，余りはr_kである。まず１つ目に，「k，$l\leq m$，$k\neq l\Rightarrow q_k\neq q_l$，$q_k$，$q_l\geq m$」が成り立つ必要がある。つまり，$k\leq m$のとき，$k\to q_k$は単射である。そのとき，示したいものより少し強く「$k\leq m$，$k<l\Rightarrow q_k>q_l$」を示すことにする。$q_l\geq q_k$とする。$lq_l\geq lq_k=kq_k+(l-k)q_k\geq kq_k+m=kq_k+r_k+(m-r_k)\geq m^2+k-r_k>m^2$となり矛盾する。なぜなら，$k\leq m$，$q_k\geq m$だからである。よって，「$k$，$l\leq m$，$k\neq l\Rightarrow q_k\neq q_l$，$q_k$，$q_l\geq m$」が成り立つことが示された。

次に，２つ目のことを示すため，「$k>m$のとき商は１，２，…，$m-1$の全ての数である」ことを考える。そのために，$q_k<m$を示す。$q_k\geq m$とすると，$m^2=kq_k+r_k>m^2$となり，矛盾する。$k>m$だからである。さらに，$\{1,2,3,\cdots,m-1\}\ni\forall l$を商にもつ$q_l$があることを示す。$m^2=lq_l+r_l$，$0\leq r_l<l$を$m^2=q_l\,l+r_l$と見直すと，$q_l\geq m>l>r_l>0$である。なぜなら，$l=m$のとき$q_l=m$，１つめの証明から$l<m\Rightarrow q_l>m$だからである。よって，$k>m$のとき，商は１，２，…，$m-1$の全ての数である。

したがって，この２つのことから「m^2を１，２，３，…，m^2で割った商として現れる整数の個数は$2m-1$である」は示された(表13)。

さらに，いくつかの具体例を考えながらmの形に拡張できないかと考える。一般化することで，数学は拡がる。現段階では，m^2とそれ以外の場合分けが考えられる。一般化するにはいくつかの例を確かめ検討する必要があり，13と16と2^5の３つの例からだけでは不十分な可能性がある。そこで，さらにいくつか考えてみようと，16の次の17を調べてみることにより，商の個数は$2\times4-1$だとわかる(表14)。これは，平方数でなくてもm^2のときと同じ考え方になっている。次に，18の場合も同様に$2\times4-1$となることがいえる

表12：m^2の表現

		商
$m^2=$	$m^2\div 1$	$=m^2$
	2	
	3	
	$\vdots$	
	m	m
	$m-1$	
	$\vdots$	

表13：m^2の証明

m^2を$1,2,3,\cdots,m^2$で割った商として現れる整数の個数は$2m-1$である。

＜証明＞

$1\leq k\leq m^2$とする。

$m^2=k\cdot q_k+r_k$，$0\leq r_k<k$となるq_k，r_kは一意に存在する。

つまり，m^2をkで割ったとき　商q_k，余りr_k

$\boxed{k,l\leq m,\ k\neq l\ \Rightarrow\ q_k\neq q_l\quad q_k,q_l\geq m}$

(つまり，$k\leq m$のとき　$k\to q_k$は単射)

$k\leq m,k<l\ \Rightarrow\ q_k>q_l$を示す。

$q_l\geq q_k$とする。

$$\begin{aligned}lq_l\geq lq_k&=kq_k+(l-k)q_k\\&\geq kq_k+m\quad\because k\leq m\text{より}q_k\geq m\\&=kq_k+r_k+(m-r_k)\\&\geq m^2+k-r_k\\&>m^2\quad\therefore\text{矛盾}\end{aligned}$$

$\boxed{k>m\text{のとき商は}1,2,\cdots,m-1\text{の全ての数である。}}$

$q_k<m$を示す。

$q_k\geq m$とすると

$m^2=kq_k+r_k>m^2$　∴矛盾

$(k>m)$

$\{1,2,3,\cdots,m-1\}\ni\forall l$を商にもつ$q_l$があることを示す。

$m^2=lq_l+r_l$，$0\leq r_l<l$を

$m^2=q_l l+r_l$と見直すと

$q_l\geq m>l>r_l>0$

$$\begin{pmatrix}l=m\text{のとき}q_l=m\\l<m\ \Rightarrow\ q_l>m\end{pmatrix}$$

■

表14：17の表現

	商
17 = 17 ÷ 1 = 17	
2	8
3	5
4	4
5	3
⋮	⋮

表15：18の表現

	商
18 = 18 ÷ 1 = 18	
2	9
3	6
4	4
5	3
⋮	⋮

(表15)。この２つの場合の表現において，境界線までの４個の商の個数の意味を考えてみると，ガウス記号を用いた$[\sqrt{17}]=4$と$[\sqrt{18}]=4$に気がつくという反照的思考がもたらされる。この発見からの新たな選択的知覚により，m^2とそれ以外で場合分けをしていたことが間違いであるという反省的思考をもたらすことになる。よって，この場合のmの商の個数は，$2[\sqrt{m}]-1$と新しく解釈される。このパターンは，割る数と商が重なっているときの場合である。こうして具体的な段階からより一般化する数学的なアイデアが得られる。

では，割る数と商が同じ数にならなくなるのはいかなるときだろうかと考える。それは，表14や表15の線での数が重ならないとき，つまり，ペアが(４，５)になるときである。よって，このことから20以上の数と考えられる。20の場合を考えると，商の個数は２×４となる(表16)。したがって，このパターンにおけるmの商の個数は，一般的に$2[\sqrt{m}]$と解釈できる。

表16：20の表現

	商
20 = 20 ÷ 1 = 20	
2	10
3	6
4	5
5	4
⋮	⋮

17，18，20の表現を反省的思考の対象とすると，境目の線におけるペアが(４，４)から数字が重ならない(４，５)に変化するときにパターンが変わることがわかった。そして，数字が重ならない24の(４，６)の際にも，(４，５)のときと同様の考え方が成り立つことがわかる(表17)。それゆえ同様にして考えられるのは，初めて重ならない(４，５)の２数の積がもとの数以下になったときが条件であるといえる。具体的に考えれば，16，17，18，19のときの商の個数は２×４－１であり，20，21，22，23，24のときは２×４となる。再度境目の条件(４，５)を考えると，４とは一般化すると$[\sqrt{m}]$であり，５とは$[\sqrt{m}]+1$を表していることがいえる。

よって，自然数mを１，２，３，…，mで割った商として現れる整数は，２つの場合に形式化される。１つ目は，$[\sqrt{m}]([\sqrt{m}]+1)>m$のとき，$2[\sqrt{m}]-1$である。２つ目は，$[\sqrt{m}]([\sqrt{m}]+1)\leq m$のとき，$2[\sqrt{m}]$である(表18)。このように，与えられた問いは新たな表現から帰納的に確かめられることになる。

これまでみてきたように，2^{2004}を2^4や2^6などの単純で認識しやすいものから始め，２の偶数乗，底が２だけでないm^2，mへと少しずつ複雑なものに昇ってきた。まず始めの個人の考え方から他者の刺激を受けることで，反省的思考の対象とすることができた。そこから反照的思考により，新しい構造を捉えることになる。他者のメッセージを契機に，2^{2004}を新たな解釈で捉え，この形に依存しない創発的な思考が生み出される。2^{2004}の類比であるm^2を考え，そこからさらに一般化したmに発展させたのである。その特殊なものとして，与えられた問題の2^{2004}を考えることができた(図１)。あ

表17：24の表現

	商
$24 \div 1$	$= 24$
2	12
3	8
4	6
5	4
⋮	⋮

表18：mの一般化

mは自然数とする。
mを$1,2,3,\cdots,2^{2004}$で割った商として現れる整数は

⑴ $[\sqrt{m}]([\sqrt{m}]+1) > m$のとき　$2[\sqrt{m}]-1$
⑵ $[\sqrt{m}]([\sqrt{m}]+1) \leq m$のとき　$2[\sqrt{m}]$

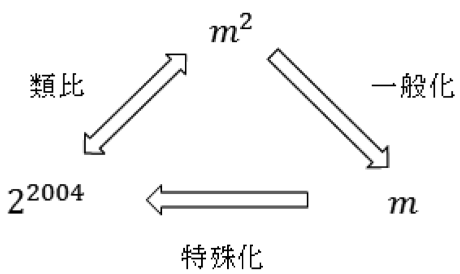

図１：2^{2004}の類比，一般化，特殊化

る一般化された型があり，個々の問題はその特殊なものとして考えられる。数学の問題には，このような特徴がある。特殊なものをいくらやっても一般にたどり着かないこともあるが，いくつかの特殊なものを探究するうちに，一般化への道が徐々に拓けるのである。

そこで，これまでのように協同で思考し構造を捉えることができれば，2^{2004}の問いの意味が違ってみえる。このように仕組んであることは，数学にはたくさんある。なぜこのような問題が取り上げられるのか，この問題の本質は何だろうかなどとその背景や他のものとの関連性を考えることが必要である。それは，既習事項とのつながりを明らかにし，今後の学びの基礎にもなる。１人で考えるには限界があるが，他者からの刺激により個人の思考だけに終わらず，新たな見方や捉え方をもつことができる。他者のメッセージを受け取り解釈することで，多層的な視点をもち探求することが可能になるといえる。

４．まとめ

これまでの思考を分析することにより，模索の中で多様な方法を駆使し，様々な視点から本質に迫る過程を示した。このように他者の考えを取り入れ実践することで，この問題を解くだけに終わらず，スパイラルに探究を深め発展させていくことが可能となる。「思考の外化→反省的思考→表現→認識→反照的思考→再認識」は循環しつつ繰り返され，「問い→類比→一般化→特殊化→構造化」と内容を深めていく。認識とは，限定された視点とその視点から捉えることができる範囲において，対象をみることである。それは，対象をある視点にしたがって切り取ったものである。ともに学ぶことで双方が意図していない解釈をもたらし，問いの背後にある構造を把握して本質を追究していく思考が創発される。今後の課題は，生徒が他者と対話をしながらいかに問いを位置づけし直し，問いの形を変えていくことができるのかを検討することである。

謝辞

本論文の作成にあたりご指導，ご助言を賜りました群馬大学大学院教育学研究科江森英世教授，伊藤隆教授に心より感謝申し上げます。

引用・参考文献

Bruner, J.S.（1960／1963）. 鈴木祥蔵・佐藤三郎訳. 教育の過程. 東京：岩波書店.

江森英世（2010）. 数学的コミュニケーションの創発連鎖における反省的思考と反照的思考. 科学教育研究，34（２），71-85. 日本科学教育学会.

江森英世（2012）. 算数・数学授業のための数学的コミュニケーション論序説. 東京：明治図書.

数学オリンピック財団（2012）. ジュニア数学オリンピック 2008-2012. 東京：日本評論社.

（うちだ　やすこ）